### Методика численного решения дифференциальных уравнений движения снаряда

Для решения системы дифференциальных уравнений движения снаряда рассматривались различные численные методы: явные и неявные методы Рунге – Кутта различного порядка точности.

Для дифференциального уравнения вида



семейство явных методов Рунге – Кутта представляется выражениями [119, 120]

 , (1.26)

, (1.27)

где  – шаг по времени; , ,  – коэффициенты, определяемые в зависимости от порядка метода .

В классическом методе Рунге – Кутта 4-го порядка коэффициенты  определяются следующими формулами [120]:



Для контроля погрешности интегрирования вычисляется разность двух решений, полученных методами  и  порядка [119]:

, (1.28)

где  – величина шага по времени;  – коэффициенты, соответствующие методу  порядка. При этом коэффициенты  остаются неизменными, что не существенно увеличивает объем вычислений. Данный подход к оценке погрешности решения является более экономичным по сравнению с применением правила Рунге, когда задачу необходимо решать дважды с шагом  и .

Если погрешность  оказывается меньше заданного значения , происходит переход к следующему шагу, если больше – производятся вычисления с уменьшенной величиной шага. Величина нового шага рассчитывается по следующей формуле:

.

Коэффициенты , ,  метода Рунге – Кутта принято представлять в виде таблицы Батчера [121]. Для метода Рунге – Кутта – Фельберга 4(5)-го порядка коэффициенты (таблица Батчера) представлены в таблице 1.1 [122].

Метод Дормана–Принса 5(4) порядка.

Для метода Рунге – Кутта – Вернера 6(5)-го порядка таблица коэффициентов (таблица Батчера) представлена в таблице 1.2 [122].

Таблица 1.1 – Таблица коэффициентов метода Рунге – Кутта – Фельберга 4 (5)-го порядка

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | |
| 0 |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  | –8 |  |  |  |  |
|  |  | 2 |  |  |  |  |
|  |  | 0 |  |  |  |  |
|  |  | 0 |  |  |  | 0 |

Таблица 1.2 – Таблица коэффициентов метода Рунге – Кутта – Вернера 6(5)-го порядка

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | |
| 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  | –8 |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | 0 |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  | 0 |  |  |
|  |  | 0 |  |  |  |  | 0 | 0 |
|  |  | 0 |  |  |  | 0 |  |  |

Метод Фельберга 7(8) порядка.

Неявные методы Рунге – Кутта применяются для решения жестких систем дифференциальных уравнений и менее склонны к накоплению вычислительной погрешности [123]. В отличие от явных методов, для которых матрица коэффициентов  имеет нижний треугольный вид с нулевой главной диагональю, для неявных методов матрица  произвольного вида. Следствием этого является необходимость на каждом шагу решать систему уравнений для коэффициентов . При достаточно малом шаге  можно решать данную систему методом простой итерации.

Среди неявных методов Рунге – Кутты наиболее простые в реализации диагональные неявные методы, у которых матрица  имеет нижнюю треугольную форму [124]. Эти методы имеют явную первую стадию и  неявных стадий с одинаковыми диагональными элементами матрицы .

Простейшим неявным методом является модифицированный метод Эйлера с пересчетом [116]:



Неизвестное значение  определяется методом простой итерации. Модифицированный метод Эйлера с пересчетом имеет 2-й порядок точности.

Неявный диагональный метод Рунге – Кутта 4-го порядка определяется матрицей коэффициентов, представленной в таблице 1.3 [124].

Среди многошаговых методов решения дифференциальных уравнений и систем наибольшее распространение получили явные и неявные методы Адамса. В отличие от одношаговых методов Рунге – Кутта, в методах Адамса для нахождения решения на текущем шаге используется несколько значений на предыдущих шагах. Явный многошаговый метод Адамса определяется формулой [121]

 (1.29)

где  – коэффициенты, определяемые из таблицы 1.4 [122].

При нахождении стартовых значений переменных для многошаговой процедуры расчета применяются методы Адамса более низкого порядка с уменьшением шага интегрирования или одношаговые методы Рунге – Кутта того же порядка.

Таблица 1.3 – Таблица коэффициентов неявного диагонального метода Рунге – Кутта 4-го порядка

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | |
| 0 | 0 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 |  |  |  | 0 | 0 |

Таблица 1.4 – Таблица коэффициентов явных методов Адамса 1–5-го порядков

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 1 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Для жестких систем дифференциальных уравнений применяются неявные методы Адамса. Интегрирование уравнений производится по формуле

 (1.30)

где  – коэффициенты, определяемые из таблицы 1.5 [122].

При этом на каждом шаге необходимо решать нелинейные алгебраические уравнения. Для этого применяется метод последовательных приближений или метод Ньютона.

Таблица 1.5 – Таблица коэффициентов неявных методов Адамса 1–5-го порядков

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 1 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Локальная погрешность методов Адамса -го порядка – . Интегральная погрешность решения оценивается с помощью правила Рунге.

Система дифференциальных уравнений движения (1.5), (1.7) решалась численно. Для быстро вращающегося снаряда шаг интегрирования по времени определялся из условия , где  – аксиальная скорость вращения снаряда (рад/с), . Рассматривались явные и неявные методы Рунге – Кутта различного порядка, явные и неявные многошаговые методы Адамса.

На рисунке 1.7 представлены графики зависимости погрешности рассматриваемых методов от величины шага по времени.



Рисунок 1.7 – Зависимость погрешности численных методов от величины шага по времени

Для явных методов Рунге – Кутта и Адамса 4-го порядка величина шага интегрирования, обеспечивающая сеточную сходимость, с, что сравнимо с вычислительной погрешностью для одинарной точности представления чисел в ЭВМ. Применение неявных методов позволяет увеличить шаг интегрирования до . Однако при этом необходимо решать нелинейные алгебраические уравнения и общее время расчета снижается незначительно. Максимальное значение шага с получено в случае применения метода Рунге – Кутта – Вернера 6-го порядка с контролем погрешности интегрирования.

В случае использования инженерной методики расчета траектории для численного решения дифференциальных уравнений движения центра масс снаряда (1.11)–(1.13) достаточно применение явного метода Рунге – Кутта 4-го порядка точности, при этом шаг интегрирования по времени . При дополнении основной системы уравнений движения (1.11)–(1.13) линеаризованными уравнениями колебаний снаряда относительно центра масс (1.17)–(1.18) шаг интегрирования по времени .